

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

TC 16

Cursus methoden der mathematische physica,

Den Haag 1951/52.

De trillingen van een membraam.

S.C.van Veen.



1952

CURSUS

Methoden der mathematische physica, 3.

Den Haag

1951-1952

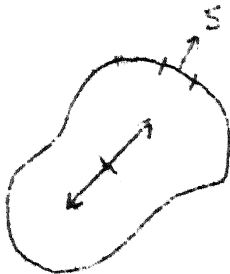
De trillingen van een membraan.

S.C. van Veen

1951/52

Cursus:
Methoden der Mathematische Physica
te s'Gravenhage,
De trillingen van een membraan
door
Prof. Dr S.C. van Veen.

Een membraan is een elastisch lichaam, in de vorm van een dun vlies, zonder weerstand tegen buiging, wel tegen rek. Wij denken zulk een membraan uitgespannen in een gegeven vlakke randkromme door een overal constante trekkracht S kg/cm. Wij maken de veronderstelling,



dat de spanning in alle punten van het membraan even groot is.

Men ziet dan gemakkelijk, dat langs één of andere doorsnede een trekkracht van S kg/cm van de ene zijde van de doorsnede op de andere wordt overgebracht.

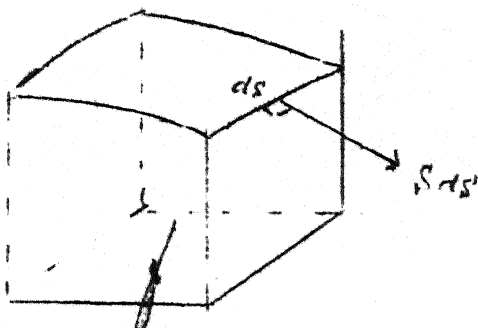
a). Evenwichtsvergelijkingen.

Kies xy -vlak in vlak van het membraan. Wij denken op het oppervlak van het membraan in z -richting per vlakte-eenheid een kracht $q(x,y)$ kg/cm² aangebracht.

Op een rechthoekige met zijden dx en dy werkt dan // z -as: $q dx dy$. De verplaatsingen loodrecht op het membraan worden voorgesteld door $w(x,y)$. Dus de vergelijkingen van het membraan na deformatie is

$$z = w(x,y).$$

De uitwijkingen w worden zo klein verondersteld, dat producten van uitwijkingen of hun afgeleiden tegenover lineaire functies daarvan kunnen worden verwaarloosd. Evenzo nemen wij aan, dat de spanningsveranderingen bij de deformatie tegenover de beginspanning S verwaarloosbaar zijn.



Op de randelement ds werkt $\perp$ element in raakvlak de kracht $S ds$.

De richting van ds wordt bepaald door de richtingscos $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$.

De richting $S ds$ is loodrecht op de richting $(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds})$

en bovendien loodrecht op de normaal in het aangrijpingspunt.

(richtingsas verhouden zich als $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, -1$).

De richtingsgrootheden van $S ds$ zijn dus:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} & -1 \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} -1 & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial s} \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix}$$

De Z-componente is dus: $dZ = S(\frac{\partial w}{\partial x} dy - \frac{\partial w}{\partial y} dx)$,

dus de kracht op gehele vlakke element.

$$Z = \int S(\frac{\partial w}{\partial x} dy - \frac{\partial w}{\partial y} dx) \quad (1)$$

uitgestrekt langs de rand van f.

Wegens de bekende transformatie (Gauss),

$$\iint (\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) dx dy = \int (\frac{\partial w}{\partial x} dy - \frac{\partial w}{\partial y} dx).$$

wordt (1)

$$Z = \iint S(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) dx dy$$

uitgestrekt over f.

Deze kracht moet evenwicht maken met de belasting:

of

$$\iint [S(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) + q(x,y)] dx dy = 0.$$

Deze uitdrukking moet gelden voor ieder willekeurig vlakke-element, dus

$$S(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) + q(x,y) = 0 \quad (2)$$

Dit is de gezochte evenwichtsvergelijking.

b) Bewegingsvergelijkingen.

Aan de belasting per oppervlakte eenheid wordt de traagheidsweerstand per vlakteenheid toegevoegd.

Stel de massa per vlakteenheid = μ , dus de traagheidsweerstand:

$$- \mu(x,y) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Hieruit volgt de bewegingsvergelijking:

$$S(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) + q(x,y,t) - \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

I) Vrije trillingen (geen uitwendige krachten, dus $q(x,y,t) = 0$)

$$s \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

of

$$c^2 \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (3)$$

met

$$c^2 = \frac{s}{\mu}; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \Delta w.$$

Wij zullen aannemen, dat ook μ constant is.

Randvoorwaarden: Langs de randkromme geldt:

$$\text{voor alle waarden van } t \geq 0, \quad w = 0 \quad (3')$$

Voor $t = 0$ moet de beginstand van het membraan en de beginsnelheid in ieder punt gegeven zijn, dus:

$$\text{voor } t = 0, \quad w = f(x,y), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = g(x,y) \quad (3'')$$

c) Particuliere oplossingen.

De vergelijking (3) en de randvoorwaarden zijn lineair. Daarom zoeken wij eerst particuliere oplossingen $w_1, w_2, w_3, \dots$ van de gedaante:

$$w_k(x,y,t) = W_k(x,y) \cos \lambda_k t \text{ of } W_k(x,y) \sin \lambda_k t \quad (4)$$

(periodieke particuliere oplossingen).

Dan voldoet ook iedere oplossing

$$w = \sum_n c_n w_n \quad (5)$$

waarin de constante coëfficiënten c_n willekeurig zijn. Wij zullen in enkele belangrijke bijzondere gevallen zien, hoe deze coëfficiënten dan kunnen worden bepaald, opdat aan de randvoorwaarden kan worden voldaan.

Substitutie van $w = W(x,y) \begin{matrix} \cos \lambda t \\ \sin \lambda t \end{matrix}$

in (3) levert:

$$c^2 \Delta W + \lambda^2 W = 0$$

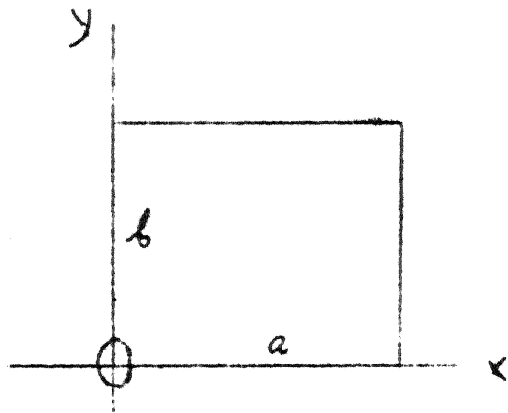
of

$$\Delta W + \lambda^2 W = 0. \quad \left(\lambda^2 = \frac{\lambda^2}{c^2} \right) \quad (6)$$

Wij zullen aantonen, dat het membraan alleen bij zeer bepaalde waarden van de frequentie λ periodieke trillingen kan uitvoeren.

De differentiaalvergelijking $\Delta W + \lambda^2 W = 0$, kan ^{dan} slechts voor bepaalde waarden van λ^2 oplossingen bezitten, die aan de rand verdwijnen en niet identiek nul zijn. Deze waarden λ^2 heten de "eigenwaarden" van het randwaarde probleem. De bijbehorende functies $W(x,y)$ heten de "eigenoplossingen" van het probleem.

d). Als voorbeeld kiezen wij het rechthoekige membraan.



Kies de x-as langs de zijde a
Kies de y-as langs de zijde b.
Wij zoeken eerst naar particuliere
oplossingen van de gedaante:

$$W = p(x) \cdot q(y). \quad (7)$$

Substitutie van (7) en (6) geeft:

$$q(y)p''(x) + p(x)q''(y) + \lambda^2 p(x)q(y) = 0$$

of

$$\frac{p''(x)}{p(x)} = - \frac{q''(y) + \lambda^2 q(y)}{q(y)}.$$

Het linkerlid is een functie van x, het rechterlid is een functie van y, dus beide leden stellen dezelfde constante voor.

Noem deze constante $-\alpha^2$, dan vinden we de beide differentiaalvergelijkingen:

$$p''(x) + \alpha^2 p(x) = 0 \quad (8^a)$$

$$q''(y) + \beta^2 q(y) = 0 \quad (8^b)$$

met

$$\alpha^2 + \beta^2 = \lambda^2 \quad (9).$$

Particuliere oplossingen van 8^a : $p_1(x) = \sin \alpha x$; $p_2(x) = \cos \alpha x$.

8^b : $q_1(y) = \sin \beta y$; $q_2(y) = \cos \beta y$.

van de 4 particuliere oplossingen:

$$W_{11} = p_1 q_1 = \sin \alpha x \sin \beta y;$$

$$W_{12} = p_1 q_2 = \sin \alpha x \cos \beta y;$$

$$W_{21} = p_2 q_1 = \cos \alpha x \sin \beta y;$$

$$W_{22} = p_2 q_2 = \cos \alpha x \cos \beta y;$$

(10)

voldoet alleen de eerste aan de eis, dat deze oplossing verdwijnt langs de randen $x = 0$, en $y = 0$.

Dus de enig bruikbare particuliere oplossing van het type (10) is

$$W_{11} = \sin \alpha x \sin \beta y \quad \text{met} \quad \alpha^2 + \beta^2 = \lambda^2 \quad (11)$$

Opdat deze oplossing ook aan de randen $x = a$ en $y = b$ verdwijnt, moet

$$\sin \alpha a = 0, \quad \sin \beta b = 0$$

zijn, of

$$= \frac{m\pi}{a}, \quad = \frac{n\pi}{b}. \quad (m \text{ en } n \text{ geheel}).$$

De eigenwaarden λ^2 zijn:

$$\lambda_{m,n}^2 = \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (11)$$

De frequenties worden nu gevonden uit

$$\nu_{m,n} = \frac{1}{2\pi} \lambda_{m,n} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$

De bijbehorende trillingstijden zijn:

$$T_{m,n} = \frac{2\pi}{v_{m,n}} = \frac{2}{c \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}}.$$

De diepste toon vinden wij voor $m = n = 1$. Voor alle andere waarden van m en n ontstaan de boventonen.

De algemene trilling van een membraan kan additief uit een willekeurig aantal van het type (11) worden samengesteld:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_{m,n} \cos v_{m,n} t + B_{m,n} \sin v_{m,n} t \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (12)$$

waarin $A_{m,n}$ en $B_{m,n}$ constanten zijn, die kunnen worden bepaald uit de beginvoorwaarden :

$$\begin{aligned} \text{Voor } t = 0 \text{ is } w &= f(x,y) && (\text{beginstand}) \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= g(x,y) && (\text{beginsnelheid}). \end{aligned}$$

$$\text{Dus } f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (13)$$

$$g(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n} v_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Hieruit kunnen de onbekende coëfficiënten $A_{m,n}$ en $B_{m,n}$ worden bepaald

$$\begin{aligned} A_{m,n} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x,y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \\ B_{m,n} &= \frac{4}{ab v_{m,n}} \int_0^a \int_0^b g(x,y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \end{aligned}$$

Cursus:

Methoden der Mathematische Physica
te 's-Gravenhage,

De trillingen van een membraan II.

door

Prof. Dr S.C. van Veen.

Harmonische boventonen.

De frequenties $\nu_{m,n}$ worden bepaald uit

$$\nu_{m,n} = \pi c \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}. \quad (m \text{ en } n \text{ geheel}) \quad (1)$$

Wij vragen nu, welke onder de trillingen van het membraan ten opzichte van elkaar harmonisch zijn, d.w.z.:

welke waarden van $\nu_{m,n}$ staan tot elkaar in rationale verhouding.

Stel $\nu_{m,n}$ en $\nu'_{m',n'}$ verhouden zich rationaal, dus

$$\frac{\nu_{m,n}}{\nu'_{m',n'}} = \frac{h}{h'} \quad (h \text{ en } h' \text{ positieve gehele getallen, zonder gemeen-$$

schappelijke deler.)

$$\text{Uit (1) volgt:} \quad h'^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) = h^2 \left(\frac{m'^2}{a^2} + \frac{n'^2}{b^2} \right) \quad (2)$$

of

$$\frac{h'^2 m^2 - h^2 m'^2}{a^2} = - \frac{h'^2 n^2 - h^2 n'^2}{b^2}$$

De tellers zijn gehele getallen. Als de verhouding $\frac{a^2}{b^2}$ niet rationaal is, dan moeten de tellers dus beide = 0 zijn, of

$$\frac{m}{m'} = \frac{n}{n'} = \frac{h}{h'}.$$

Dus $m' = lm$, $n' = ln$, waarin l een geheel getal is, als m en n onderling ondeelbaar zijn.

Hieruit volgen een rij van harmonische trillingen:

$$\nu = \nu^x, 2 \nu^x, 3 \nu^x \dots, \text{ met } \nu^x = \pi c \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \text{ als } \frac{a^2}{b^2} \neq \text{ratio-}$$

naal getal is (m en n onderling ondeelbaar).

ν^x noemt men de "relative grondtoon" of "relative grondtrilling".

De absoluut laagste toon (grondtoon van het membraan) wordt gevonden voor $m = n = 1$.

Uit ieder paar onderling ondeelbare getallen m en n ontstaat op deze wijze een rij harmonische boventonen.

Een ander paar m_1, n_1 levert de rij: $\nu = \nu_1^x, 2 \nu_1^x, 3 \nu_1^x, \dots$

Als $\frac{a^2}{b^2}$ niet rationaal is, zijn 2 tonen van verschillende rijen niet-harmonisch.

Wanneer echter $\frac{a^2}{b^2}$ wel rationaal is, kunnen ook tonen van verschillende rijen onderling harmonisch zijn.

Stel in dit geval: $\frac{a^2}{b^2} = \frac{\beta}{\alpha}$. (β en α geheel positief, onderling on-deelbaar.)

De voorwaarde voor harmonie (2) levert dan:

$$h'^2(\alpha m^2 + \beta \eta'^2) = h^2(\alpha m'^2 + \beta \eta'^2) \quad (3)$$

Als 2 tonen van een rij harmonisch zijn, dan zijn ook alle tonen van de rij 2 aan 2 harmonisch.

Wanneer dus één toon van een rij harmonisch is met 1 toon van een rij ν' , dan is iedere toon van de 1^o rij harmonisch met iedere toon van de 2^o rij, en men noemt beide rijen harmonisch.

Om alle met betrekking tot een bepaalde rij harmonische rijen te zoeken stellen wij in (3)

$$\begin{aligned} \alpha m^2 + \beta \eta'^2 &= \gamma \text{ (geheel).} \\ hm' &= x, h\eta' = y, h' = z \text{ (x,y,z geheel).} \end{aligned}$$

(3) gaat over in

$$\gamma z^2 = \alpha x^2 + \beta y^2. \quad (4)$$

en het probleem van het zoeken van alle met ν harmonische rijen komt neer op de oplossing van het probleem uit de getallentheorie

"gevraagd alle oplossingen x,y,z in gehele getallen te vinden van de onbepaalde vergelijking

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma z^2."$$

1 oplossing is bij voorbaat bekend ($x = m, y = n, z = 1$).

Voor enkelvoudige tonen, met gelijke trillingsgetallen geldt $h' = z = 1$.

Men zoekt dan naar de oplossingen in gehele getallen van:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$$

Voorbeeld: $\alpha = \beta = 1$:

$$\begin{aligned} \gamma = 2 &= 1^2 + 1^2 \\ 5 &= 1^2 + 2^2 = 2^2 + 1^2 \\ 10 &= 1^2 + 3^2 = 3^2 + 1^2 \\ \hline 65 &= 1^2 + 8^2 = 8^2 + 1^2 = 4^2 + 7^2 = 7^2 + 4^2. \end{aligned}$$

Knooplijnen: Een enkelvoudige trilling van een rethoekig membraan heeft de vorm:

$$W = \left\{ A \cos \nu_{m,n} t + B \sin \nu_{m,n} t \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} .$$

welke, door eventuele verandering van het begin tijdstip, ook geschreven kan worden als

$$W = C \sin \nu_{m,n} t \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

(C = amplitude).

Als t een veelvoud is van $\frac{\pi}{\nu_{m,n}} = \frac{T_m \cdot n}{2}$, dan is $W = 0$, en alle punten

van het membraan gaan gelijktijdig door de evenwichtsstand.

Bovendien is $W = 0$ voor alle waarden van t , als x of y gehele veelvouden zijn van $\frac{a}{m}$ of van $\frac{b}{n}$.

Dit levert 2 stelsels rechten // assen, die gedurig in rust blijven (knooplijnen).

Beschouwen wij nu een samengestelde trilling:

$$W = \sum C_{m,n} \sin \nu_{m,n} t \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (5)$$

Uit $\sum_{n=1}^k A_n \sin \alpha_n t \equiv 0$ voor alle t volgt:

$$1^\circ \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k. \quad (6')$$

$$2^\circ \quad \sum_{n=1}^k A_n = 0 \quad (6'')$$

Vragen wij bij een samengestelde trilling als (5) naar knooplijnen dan volgt uit (5) en (6'') de voorwaarden:

$$\sum C_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0$$

waarin deze som moet worden uitgedrukt over alle m en n waarvoor

$\alpha m^2 + \beta n^2$ dezelfde waarde χ verkrijgt.

Hieruit ontstaan de vergelijkingen voor de klankfiguren.

Voorbeeld: $a = b = \pi$ (vierkant).

$$\lambda^2 = 10 \quad \text{of} \quad \nu^2 = 10c^2.$$

Samengestelde trilling:

$$\begin{aligned} W &= \sin \nu t \{ A \sin x \sin 3y - B \sin 3x \sin y \} \\ &= A \sin \nu t \{ \sin x \sin 3y - \mu \sin 3x \sin y \} \end{aligned}$$

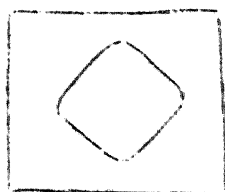
Knooplijnen: $\sin x \sin 3y = \mu \sin 3x \sin y.$

$$\text{of} \quad \cos 2y + \frac{1}{3} = \mu (\cos 2x + \frac{1}{3}).$$

In de volgende figuren zijn de knooplijnen geschetst voor

$$\mu = -1; -1/2; -1/3; -1/5; 0; 1/2; 1.$$

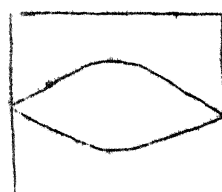
(bij verwisseling van x en y nemen de reciproke waarden).



$\mu = -1$

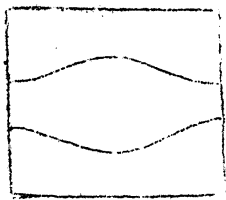


$\mu = -1/2$

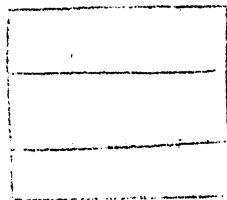


$\mu = -1/3$

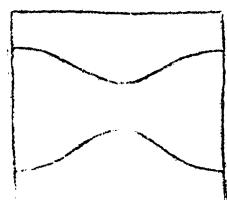
--9--



$\mu = -1/5$



$\mu = 0$



$\mu = 1/2$



$\mu = 1.$

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestr. 49,
AMSTERDAM (O).

Cursus:
Methoden der Mathematische Physica
te 's-Gravenhage,

De trillingen van een membraan III.
door

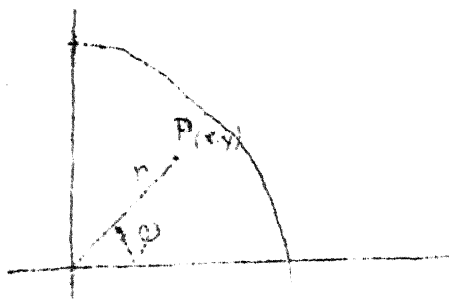
Prof. Dr S.C. van Veen.

Cirkelvormig membraan.

Wij komen terug op de algemene differentiaalvergelijking (6)

$$\Delta W + \lambda^2 W = 0. \quad (\lambda^2 = \frac{v^2}{c^2}). \quad W = W(x, y) \begin{matrix} \cos vt \\ \sin vt \end{matrix}. \quad (1)$$

Wanneer het membraan door een vastcirkelvormige rand is begrensd, is het voordelig poolcoördinaten r en φ in te voeren i.p.v. x en y . Het middelpunt van de gegeven cirkel wordt als oorsprong (pool) genomen. De straal van de cirkel = a .



$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (2)$$

In vergelijking (1) moeten de coördinaten (2) worden ingevoerd, als volgt:

Uit (2) volgt:

$$1 = \cos \varphi \frac{\partial r}{\partial x} - r \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (\text{diff. naar } x)$$

$$0 = \sin \varphi \frac{\partial r}{\partial x} + r \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

of:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \varphi; \quad r \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\sin \varphi. \quad (3)$$

Analoog:

$$0 = \cos \varphi \frac{\partial r}{\partial y} - r \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (\text{diff. naar } y)$$

$$1 = \sin \varphi \frac{\partial r}{\partial y} + r \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

of:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin \varphi; \quad r \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \cos \varphi. \quad (3')$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \quad (\text{volgens 3}).$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \quad (\text{volgens 3'}).$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right) - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right) = \\
 &= \cos \varphi \left\{ \cos \varphi \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\sin \varphi}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right\} \\
 &- \frac{\sin \varphi}{r} \left\{ - \sin \varphi \frac{\partial W}{\partial r} + \cos \varphi \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \varphi} - \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right\} \quad (4) \\
 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right) \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \\
 &= \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right) + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right) = \\
 &= \sin \varphi \left\{ \sin \varphi \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \varphi} - \frac{\cos \varphi}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right. \\
 &+ \left. \frac{\cos \varphi}{r} \left\{ \cos \varphi \frac{\partial W}{\partial r} + \sin \varphi \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \varphi} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right\} \right. \quad (4')
 \end{aligned}$$

Uit (4) en (4') volgt door optelling:

$$\Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2}.$$

Tenslotte gaat vergelijking (1) over in :

$$\boxed{\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \lambda^2 W = 0.} \quad (5)$$

W moet eindelijk blijven als r varieert van 0 tot a, en W moet dezelfde waarde verkrijgen als φ met een bedrag 2π toeneemt. Wij zoeken daarom in de eerste plaats particuliere oplossingen van de gedaante:

$$W = R(r) \cos m \varphi, \text{ en } W = R(r) \sin m \varphi. \quad (m \text{ geheel}) \quad (6)$$

waardoor de veranderlijken gescheiden zijn.

Substitutie van (6) in (5) levert

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(\lambda^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0$$

of

$$\frac{d^2 R}{d(\lambda r)^2} + \frac{1}{\lambda r} \frac{dR}{d\lambda r} + \left(1 - \frac{m^2}{(\lambda r)^2} \right) R = 0 \quad (7)$$

waardoor wij gekomen zijn op een bekende gewone lineaire differentiaalvergelijking van de 2^e orde; de differentiaalvergelijking van Bessel:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2} \right) y = 0 \quad (8)$$

De oplossing hiervan wordt, zoals bekend is, gevonden door reeksontwikkeling.

Stel daartoe in (8)

$$y = x^\alpha + A_1 x^{\alpha+1} + A_2 x^{\alpha+2} + \dots$$

$$\frac{dy}{dx} = \alpha x^{\alpha-1} + A_1(\alpha+1)x^\alpha + A_2(\alpha+2)x^{\alpha+1} + \dots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + A_1(\alpha+1)\alpha x^{\alpha-1} + A_2(\alpha+2)(\alpha+1)x^\alpha + \dots$$

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - m^2)y \equiv$$

$$\left\{ \alpha(\alpha-1) + \alpha - m^2 \right\} x^\alpha + A_1 \left\{ (\alpha+1)\alpha + (\alpha+1) - m^2 \right\} x^{\alpha+1} +$$

$$A_2 \left\{ (\alpha+2)(\alpha+1) + (\alpha+2) - m^2 \right\} x^{\alpha+2} + \dots A_k \left\{ (\alpha+k)(\alpha+k-1) + (\alpha+k-1) - m^2 \right\} x^{\alpha+k} +$$

$$\dots + x^{\alpha+2} + \dots + A_{k-2} x^{\alpha+k} + \dots \equiv 0$$

De coëfficiënten van alle machten van x moeten dus nul zijn, in de eerste plaats:

$$\alpha(\alpha-1) + \alpha - m^2 = 0 \text{ (bepalende of karakteristieke verg.)}$$

dus

$$\alpha^2 = m^2$$

$$\alpha = \pm m.$$

(9)

$$A_1 \left\{ (\alpha+1)^2 - m^2 \right\} = 0. \quad A_1 \left\{ (1 \pm m)^2 - m^2 \right\} = 0$$

$$A_1(1 - 2m) = 0, \quad m \text{ geheel} \neq \frac{1}{2}$$

$$\text{dus } \underline{A_1 = 0.}$$

Verder algemeen:

$$A_k \left\{ (\alpha+k)^2 - m^2 \right\} + A_{k-2} = 0$$

$$A_k \left\{ 1^2 \pm 2km \right\} + A_{k-2} = 0$$

$$A_k = \frac{A_{k-2}}{k(k \pm 2m)}$$

$$A_0 = 1.$$

Wij vinden zo de 2 fundamentele oplossingen:

$$y_1 = x^m \left\{ 1 + \frac{x^2}{2^2 \cdot 1 \cdot (m+1)} + \frac{x^4}{2^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (m+1)(m+2)} + \frac{x^6}{2^6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (m+1)(m+2)(m+3)} + \dots \right\}$$

$$y_2 = x^{-m} \left\{ 1 + \frac{x^2}{2^2 \cdot 1 \cdot (m-1)} + \frac{x^4}{2^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (m-1)(m-2)} + \dots \right\}$$

De 2^e oplossing is voor ons doel onbruikbaar, omdat $y_2^2 \rightarrow \infty$ voor $x \rightarrow 0$ bij positieve m .

De alleen bruikbare oplossing is;

$$y_1 = C \cdot x^m \left\{ 1 - \frac{x^2}{2^2 \cdot 1 \cdot (m+1)} + \frac{x^4}{2^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (m+1)(m+2)} - \frac{x^6}{2^6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (m+1)(m+2)(m+3)} + \dots \right\}$$

Uit doelmatigheidsoverwegingen kiest men de willekeurige constante

$$C = \frac{1}{2^m \cdot m!}.$$

De ontstane uitkomst;

$$y_1 = \frac{x^m}{2^m \cdot m!} \left\{ 1 - \frac{x^2}{2^2 \cdot 1 \cdot (m+1)} + \frac{x^4}{2^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (m+1)(m+2)} \dots \right\} = J_m(x)$$

wordt de functie van Bessel van de m^e orde genoemd.

Men vindt hiermede als particuliere oplossing van vergelijking (7)

$$W(r, \varphi) = J_m(\lambda r) \{ A \cos m\varphi + B \sin m\varphi \}.$$

waarin A en B willekeurige constanten zijn.

Randvoorwaarden.

De eerst eis is: $W = 0$ aan de rand, dus voor $r = a$ voor alle waarden van φ , dus

$$W(a, \varphi) = 0 \text{ voor alle waarden van } \varphi$$

m.a.w.

$$J_m(\lambda a) = 0 \tag{10}$$

a moet dus een nulpunt van $J_m(x)$ zijn.

Men kan bewijzen, dat de vergelijking $J_m(x) = 0$ reële en alleen reële oplossingen bezit; en wel oneindig vele, positieve zowel als negatieve (met x_k voldoet ook $-x_k$). Uit de aard der zaak voldoet ook de wortel $x = 0$ voor $m > 0$. Deze kunnen wij niet gebruiken.

Naar de positieve oplossingen, naar opvolgende grootte gerangschikt

$$\xi_{m,1}; \xi_{m,2}; \xi_{m,3}; \dots$$

dan is

$$\lambda_{m,n} a = \xi_{m,n},$$

dus de eigenwaarden zijn

$$\lambda_{m,n} = \frac{\xi_{m,n}}{a}, \quad C \lambda_{m,n} = \frac{C \xi_{m,n}}{a} = \gamma_{m,n}$$

De bijbehorende particuliere eigen-oplossing is:

$$W_{m,n} = \left\{ A_{m,n} \cos m\varphi + B_{m,n} \sin m\varphi \right\} J_m \left(\frac{\xi_{m,n}}{a} r \right)$$

en de algemene trilling van het membraan kan additief uit zulke particuliere oplossingen worden opgebouwd als:

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_m\left(\frac{\xi_{m,n} r}{a}\right) \left[(A_{m,n} \cos m\varphi + B_{m,n} \sin m\varphi) \cos Y_{m,n} t + (A'_{m,n} \cos m\varphi + B'_{m,n} \sin m\varphi) \sin Y_{m,n} t \right]. \quad (11)$$

Deze oplossing moet nu echter nog worden aangepast aan de begintoestand, waaruit de onbekende coëfficiënten $A_{m,n}$, $B_{m,n}$, $A'_{m,n}$, $B'_{m,n}$ kunnen worden bepaald. Voor $t = 0$ is in de eerste plaats de uitwijking $w = f(r, \varphi)$ in elk punt gegeven.

Dus:

$$f(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{m,n} r) \left\{ A_{m,n} \cos m\varphi + B_{m,n} \sin m\varphi \right\},$$

waaruit volgens de bekende methode van Fourier volgt:

$$\int_0^{2\pi} f(r, \varphi) \cos m\varphi d\varphi = \pi \sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{m,n} r) A_{m,n}; \quad m \neq 0$$

$$\text{resp. } 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} J_0(\lambda_{0,n} r) A_{0,n} \text{ voor } m = 0$$

analoog 2π :

$$\int_0^{2\pi} f(r, \varphi) \sin m\varphi d\varphi = \pi \sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{m,n} r) B_{m,n}.$$

Om nu verder nog de coëfficiënten $A_{m,n}$, $B_{m,n}$ afzonderlijk te bepalen, zijn verdere eigenschappen van de Besselfuncties nodig.

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestr. 49,
Amsterdam (O).

Cursus:

Methoden der Mathematische Physica
te 's-Gravenhage.

Trillingen van een membraan IV.

door

Prof. Dr S.C. van Veen.

Vervolg: Cirkelvormig Membraan.

Eenvoudige eigenschappen van de functies van Bessel.

We hebben de vorige maal gezien, dat: (voor $m \geq 0$)

$$J_m(x) = \frac{x^m}{2^m m!} \left\{ 1 - \frac{x^2}{2^2 \cdot 1 \cdot (m+1)} + \frac{x^4}{2^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (m+1)(m+1)} - \frac{x^6}{2^6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (m+1)(m+2)(m+3)} + \dots \right\} \quad (1)$$

$$\text{of: } x^{-m} J_m(x) = \frac{1}{2^m m!} \left\{ 1 - \frac{x^2}{2^2 \cdot 1 \cdot (m+1)} + \dots \right\}, \quad (1')$$

dus:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left\{ x^{-m} J_m(x) \right\} &= \frac{1}{2^m m!} \left\{ -\frac{x}{2 \cdot (m+1)} + \frac{x^3}{2^3 \cdot 1 \cdot (m+1)(m+2)} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{x^5}{2^5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (m+1)(m+2)(m+3)} + \dots \right\} \\ &= \frac{x}{2^{m+1} (m+1)!} \left\{ 1 - \frac{x^2}{2^2 \cdot 1 \cdot (m+2)} - \frac{x^4}{2^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (m+2)(m+3)} + \dots \right\} \\ &= -x \cdot x^{-(m+1)} J_{m+1}(x) \quad (\text{volgens } (1')), \end{aligned}$$

m.a.w.:

$$\boxed{\frac{d}{dx} \left\{ x^{-m} J_m(x) \right\} = -x^{-m} J_{m+1}(x).} \quad (2)$$

Analoog vindt men uit (1)

$$x^{m+1} J_{m+1}(x) = \frac{1}{2^{m+1} (m+1)!} \left\{ x^{2m+2} - \frac{x^{2m+4}}{2^2 \cdot 1 \cdot (m+2)} + \frac{x^{2m+6}}{2^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (m+2)(m+3)} + \right. \\ \left. - \frac{x^{2m+8}}{2^6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (m+2)(m+3)(m+4)} + \dots \right\}$$

dus:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left\{ x^{m+1} J_{m+1}(x) \right\} &= \frac{1}{2^{m+1} (m+1)!} \left\{ (2m+2)x^{2m+1} - \frac{x^{2m+3}}{2 \cdot 1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x^{2m+5}}{2^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (m+2)} - \frac{x^{2m+7}}{2^5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (m+2)(m+3)} + \dots \right\} \\ &= \frac{x^{2m+1}}{2^m m!} \left\{ 1 - \frac{x^2}{2^2 \cdot 1 \cdot (m+1)} + \frac{x^4}{2^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (m+1)(m+2)} + \dots \right\} \end{aligned}$$

$$- \frac{x^6}{2^6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (m+1)(m+2)(m+3)} + \dots \}$$

$$= x^{m+1} J_m(x) \quad \text{volgens (1).}$$

$$\text{Dus: } \left\{ \frac{d}{dx} \left\{ x^{m+1} J_{m+1}(x) \right\} = x^{m+1} J_m(x) \right\} \quad (3)$$

De uitkomsten (2) en (3) geven belangrijke resultaten over de nulpunten van de functies van Bessel.

Uit (1) volgt, dat voor $m > 0$ de oorsprong een m -voudig nulpunt is.

Dit nulpunt laten wij buiten beschouwing.

$$\text{Stel } x^{-m} J_m(x) = y.$$

Uit (2) volgt:

$$- x^{2m+1} \frac{dy}{dx} = x^{m+1} J_{m+1}(x)$$

dus:

$$\begin{aligned} - \frac{d}{dx} \left\{ x^{2m+1} \frac{dy}{dx} \right\} &= - x^{2m+1} \frac{d^2 y}{dx^2} - (2m+1) x^{2m} \frac{dy}{dx} = \\ &= \frac{d}{dx} x^{m+1} J_{m+1}(x) = x^{m+1} J_m(x) = (\text{volgens (3)}) \\ &= x^{2m+1} y. \end{aligned}$$

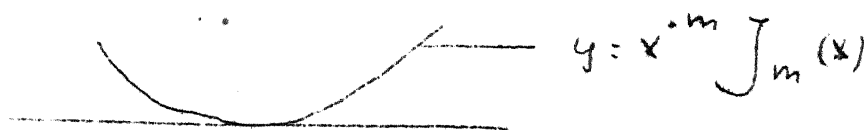
of:

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (2m+1) \frac{dy}{dx} + xy = 0. \quad (4)$$

Hieruit volgt:

Stelling III. De nulpunten van $J_m(x)$ zijn enkelvoudig, want in een dubbel (of meervoudig) nulpunt wordt

$$y = x^{-m} J_m(x) \text{ gelijkaan 0, en ook } \frac{dy}{dx} \text{ wordt gelijk aan 0.}$$



Volgens (4) wordt dan ook $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$, $\frac{d^3 y}{dx^3} = 0$, etc. . . . dus $y \equiv 0$ (reeksontwikkeling van Maclaurin).

Stelling IV. $J_m(x)$ en $J_{m+1}(x)$ hebben geen wortels gemeenschappelijk.

Want als $J_m(x_1) = 0$, $J_{m+1}(x_1) = 0$, dan is volgens (2) ook

$$\frac{d}{dx_1} x_1^{-m} J_m(x_1) = 0, \text{ dus } y = 0 \text{ en } \frac{dy}{dx} = 0.$$

Conclusie als boven.

Recurrente betrekkingen tussen functies van Bessel en haar afgeleiden.

Uit (2) volgt onmiddellijk

$$x J'_m(x) = m J_m(x) - x J_{m+1}(x) \quad (5)$$

Uit (3) eveneens

$$x J'_{m+1}(x) = x J_m(x) - (m+1) J_{m+1}(x) \quad (6)$$

of:

$$x J'_m(x) = x J_{m-1}(x) - m J_m(x) \quad (6')$$

$$(5) \text{ en } (6') \text{ leveren: } 2m J_m(x) = x \{ J_{m+1}(x) + J_{m-1}(x) \}. \quad (7)$$

Bepaalde integralen met Besselfuncties.

Uit de differentiaalvergelijking:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - m^2)y = 0$$

waaraan $J_m(x)$ voldoet, volgt:

$$x^2 \frac{d^2 J_m(\alpha x)}{dx^2} + x \frac{dJ_m(\alpha x)}{dx} + (\alpha^2 x^2 - m^2) J_m(\alpha x) = 0$$

analoog

$$x^2 \frac{d^2 J_m(\beta x)}{dx^2} + x \frac{dJ_m(\beta x)}{dx} + (\beta^2 x^2 - m^2) J_m(\beta x) = 0$$

of:

$$\begin{aligned} & x^2 \left\{ J_m(\beta x) \frac{d^2 J_m(\alpha x)}{dx^2} - J_m(\alpha x) \frac{d^2 J_m(\beta x)}{dx^2} + \right. \\ & + x \left\{ J_m(\beta x) \frac{dJ_m(\alpha x)}{dx} - J_m(\alpha x) \frac{dJ_m(\beta x)}{dx} \right\} + \\ & \left. + (\alpha^2 - \beta^2) x^2 J_m(\alpha x) J_m(\beta x) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Dus:

$$(\alpha^2 - \beta^2) x J_m(\alpha x) J_m(\beta x) =$$

$$\begin{aligned} & J_m(\alpha x) \frac{dJ_m(\beta x)}{dx} - J_m(\beta x) \frac{dJ_m(\alpha x)}{dx} + x \frac{d}{dx} \left\{ J_m(\alpha x) \frac{dJ_m(\beta x)}{dx} - J_m(\beta x) \frac{dJ_m(\alpha x)}{dx} \right\} = \\ & = \frac{d}{dx} \left[x \left\{ J_m(\alpha x) \frac{dJ_m(\beta x)}{dx} - J_m(\beta x) \frac{dJ_m(\alpha x)}{dx} \right\} \right] \end{aligned}$$

Dus:

$$(\alpha^2 - \beta^2) \int_a^b x J_m(\alpha x) J_m(\beta x) dx = \left[x \left\{ J_m(\alpha x) \frac{dJ_m(\beta x)}{dx} - J_m(\beta x) \frac{dJ_m(\alpha x)}{dx} \right\} \right]_a^b \quad (8).$$

Wegens (5) is

$$x \frac{dJ_m(\beta x)}{dx} = m J_m(\beta x) - \beta x J_{m+1}(\beta x)$$

analoog

$$x \frac{dJ_m(\alpha x)}{dx} = m J_m(\alpha x) - \alpha x J_{m+1}(\alpha x).$$

Dus:

$$\begin{aligned} & x J_m(\alpha x) \frac{dJ_m(\beta x)}{dx} - x J_m(\beta x) \frac{dJ_m(\alpha x)}{dx} = \\ & = x \{ \alpha J_m(\beta x) J_{m+1}(\alpha x) - \beta J_m(\alpha x) J_{m+1}(\beta x) \}. \end{aligned}$$

waardoor (8) overgaat in:

$$(\alpha^2 - \beta^2) \int_a^b x J_m(\alpha x) J_m(\beta x) dx = \int_a^b x \{ \alpha J_m(\beta x) J_{m+1}(\alpha x) - \beta J_m(\alpha x) J_{m+1}(\beta x) \} dx \quad (9)$$

i.h.b. voor $a = 0$, $b = 1$, (dus $J_{m+1}(\alpha x) = J_{m+1}(\beta x) = 0$ voor $m \geq 0$, $x = a = 0$),

$$(\alpha^2 - \beta^2) \int_0^1 x J_m(\alpha x) J_m(\beta x) dx = \alpha J_m(\beta) J_{m+1}(\alpha) - \beta J_m(\alpha) J_{m+1}(\beta). \quad (10)$$

Deze uitkomst wordt waardeloos voor $\beta = \alpha$.

Houden wij in

$$\int_0^1 x J_m(\alpha x) J_m(\beta x) dx = \frac{J_m(\beta) J_{m+1}(\alpha) - \beta J_m(\alpha) J_{m+1}(\beta)}{\alpha^2 - \beta^2}$$

α constant, en laten wij β tot α naderen, dan geeft de toepassing van de regel van l'Hôpital

$$\int_0^1 x J_m^2(\alpha x) dx = \frac{1}{2\alpha} \left\{ J_m(\alpha) J_{m+1}(\alpha) + \alpha J_m(\alpha) J'_{m+1}(\alpha) - \alpha J'_m(\alpha) J_{m+1}(\alpha) \right\}$$

of: 1

$$2\alpha \int_0^1 x J_m^2(\alpha x) dx = J_m(\alpha) J_{m+1}(\alpha) + \alpha \left\{ J_m(\alpha) J'_{m+1}(\alpha) - J'_m(\alpha) J_{m+1}(\alpha) \right\} \quad (11)$$

Speciale gevallen.

Wij zullen de uitkomsten (10) en (11) speciaal nodig hebben voor het geval, dat α en β nulpunten zijn van $J_m(x)$.

$$\text{Dus } J_m(\alpha) = J_m(\beta) = 0.$$

Uit (10) volgt voor $\alpha \neq \beta$,

$$\boxed{\int_0^1 x J_m(\alpha x) J_m(\beta x) dx = 0} \quad (12)$$

Uit (11) volgt:

$$2\alpha \int_0^1 x J_m^2(\alpha x) dx = -\alpha J_{m+1}(\alpha) J'_m(\alpha)$$

dus wegens (5)

$$2\alpha \int_0^1 x J_m^2(\alpha x) dx = \alpha J_{m+1}^2(\alpha),$$

of

$$\boxed{\int_0^1 x J_m^2(\alpha x) dx = \frac{1}{2} J_{m+1}^2(\alpha).} \quad (13)$$

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestr. 49,
A m s t e r d a m - 0 .

Cursus:

Methoden der Mathematische Physica
te 's-Gravenhage.

Trillingen van een membraan V.

door

Prof. Dr S.C.van Veen.

Vervolg cirkelvormig membraan: Eigenschappen van de functies van Bessel.

Stelling V. De wortels van $J_m(x)$ en $J_{m+1}(x)$ (indien aanwezig) scheiden elkaar wederkerig.

Bewijs. Stel x_k en x_{k+1} zijn 2 opeenvolgende, van nul verschillende nulpunten van $J_m(x)$ dus van $x^{-m}J_m(x)$.

Volgens (2) ligt er tussen x_k en x_{k+1} ten minste 1 nulpunt van $J_{m+1}(x)$ (stelling van Rolle). Dit nulpunt valt niet samen met x_k of x_{k+1} (St.IV).

Volgens (3) ligt er om de zelfde reden ten minste 1 nulpunt van $J_m(x)$ tussen 2 opeenvolgende nulpunten van $J_{m+1}(x)$.

Er kan echter niet meer dan 1 nulpunt van $J_{m+1}(x)$ tussen de opeenvolgende nulpunten x_k en x_{k+1} van $J_m(x)$ liggen, want waren er 2 of meer nulpunten van $J_{m+1}(x)$ tussen, dan lag daartussen weer ten minste 1 nulpunt van $J_m(x)$ en dan zouden x_k en x_{k+1} geen opeenvolgende nulpunten van $J_m(x)$ zijn. Analooq voor de nulpunten van $J_{m+1}(x)$. Dus tussen ieder paar opeenvolgende nulpunten van $J_m(x)$ ligt precies 1 nulpunt van $J_{m+1}(x)$ en evenzo tussen 2 opeenvolgende nulpunten van $J_{m+1}(x)$ één nulpunt van $J_m(x)$, zodat de nulpunten van $J_m(x)$ en $J_{m+1}(x)$ elkaar wederkerig scheiden.

Stelling VI. $J_m(x)$ bezit geen complexe nulpunten.

Immers, als $J_m(x)$ de complexe wortel $\alpha = p+qi$ bezat, dan zou $J_m(x)$ wegens (1) eveneens de toegevoegd complexe wortel $\beta = p-qi$ moeten bevatten ($p \neq 0$, $q \neq 0$).

Verder is $J_m(\beta x) = \overline{J_m(\alpha x)}$ (toegevoegd complexe waarde van $J_m(\alpha x)$).

Volgens (12) is
$$\int_0^1 x J_m(\alpha x) \cdot J_m(\beta x) dx = 0 \quad \text{wegens } \alpha \neq \beta.$$

dus
$$\int_0^1 x |J_m(\alpha x)|^2 dx = 0$$

wat onmogelijk is, omdat de integrand in het hele integratiegebied > 0 is (enkele punten eventueel uitgezonderd).

Dus de wortels van $J_m(x)$ zijn reëel.

Om nu het bestaan van nulpunten van $J_m(x)$ (m geheel) aan te tonen, kunnen wij dus volstaan met aan te tonen, dat $J_0(x)$ oneindig veel (reële) wortels heeft. Daartoe beschouwen wij de integraal

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos(x \cos \varphi) d\varphi &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!} \int_0^\pi \cos^{2k} \varphi d\varphi \\ &= \pi \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2k-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2k} \right) = \pi \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} = \\ &= \pi J_0(x). \end{aligned}$$

Dus

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \cos \varphi) d\varphi \quad (14)$$

Stel $\cos \varphi = u$. $d\varphi = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$.

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \cos \varphi) d\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \cos(x \cos \varphi) d\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos x u du}{\sqrt{1-u^2}}$$

Stel $x = (m + \frac{1}{2})\pi$ (m geheel)

$$\begin{aligned} J_0(m + \frac{1}{2})\pi &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(m + \frac{1}{2})u\pi du}{\sqrt{1-u^2}} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2m+1}} \frac{\cos(m + \frac{1}{2})u\pi du}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^m \int_{\frac{2k-1}{2m+1}}^{\frac{2k+1}{2m+1}} \frac{\cos(m + \frac{1}{2})u\pi du}{\sqrt{1-u^2}} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos v\pi dv}{\sqrt{(m + \frac{1}{2})^2 - v^2}} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^m \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{\cos v\pi dv}{\sqrt{(m + \frac{1}{2})^2 - v^2}} \quad (v = (m + \frac{1}{2})u) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos v\pi dv}{\sqrt{(m + \frac{1}{2})^2 - v^2}} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^m (-1)^k \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{\cos w\pi dw}{\sqrt{(m + \frac{1}{2})^2 - (k+w)^2}} \quad (v = w+k) \end{aligned}$$

Het is gemakkelijk in te zien, dat de laatste term ($k=m$), dus

$$\frac{2}{\pi} (-1)^m \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{\cos w\pi dw}{\sqrt{(m + \frac{1}{2})^2 - (m+w)^2}}$$

het van alle voorafgaande wint, zodat het teken van $J_0(m + \frac{1}{2})\pi$ is $(-1)^m$ (grafiek!).

Hieruit volgt: $J_0(m - \frac{1}{2})$ en $J_0(m + \frac{1}{2})$ hebben tegengesteld teken. Er ligt dus zeker minstens één nulpunt tussen $(m - \frac{1}{2})$ en $(m + \frac{1}{2})$ ($m=1, 2, 3, \dots$) m.a.w.

$J_0(x)$ bezit oneindig veel (reële) nulpunten.

Zonder bewijs geven wij nog enige resultaten over deze nulpunten. Berekeningen hebben geleerd, dat de eerste nulpunten van $J_0(x)$ bedragen

ξ_1	= 2.4048	
ξ_2	= 5.5201	3.1153
ξ_3	= 8.6537	3.1337
ξ_4	= 11.7915	3.1378
ξ_5	= 14.9309	3.1394

Het blijkt verder, dat het verschil $\xi_{k+1} - \xi_k$ snel naar π convergeert met toenemende k .

Voor grote waarden van k is:

$$\xi_k = \pi \left\{ k - \frac{1}{4} + \frac{0,050661}{2k-1} - \frac{0,053041}{(2k-1)^3} + \frac{0,262051}{(2k-1)^5} - \dots \right\}$$

Na dit uitvoerig intermezzo keren wij terug tot ons oorspronkelijk onderwerp, om na te gaan, van welke grote betekenis de functies van Bessel en haar nulpunten zijn voor de trillingen van het cirkelvormige membraan.

Voortzetting cirkelvormige membraan.

Wij vonden voor de algemene oplossing (11) (syllabus III)

$$w = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m \left(\frac{\xi_{m,n} r}{a} \right) \left[A_{m,n} \cos m\varphi + B_{m,n} \sin m\varphi \right] \cos \nu_{m,n} t \\ + (A'_{m,n} \cos m\varphi + B'_{m,n} \sin m\varphi) \sin \nu_{m,n} t$$

waarin de coëfficiënten $A_{m,n}$, $B_{m,n}$, $A'_{m,n}$ en $B'_{m,n}$ nu nog uit de beginvoorwaarden en randvoorwaarde moeten worden bepaald.

$$\nu_{m,n} = \frac{c \xi_{m,n}}{a} = c \lambda_{m,n}$$

Voor $t=0$ moet dan gegeven zijn in de eerste plaats de uitwijking

$$w = f(r, \varphi)$$

in elk punt van het membraan.

Dus:

$$f(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{m,n} r) \{ A_{m,n} \cos m\varphi + B_{m,n} \sin m\varphi \}$$

$$\text{of: } \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) \cos m\varphi d\varphi = \pi \sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{m,n} r) A_{m,n}; \quad (m \neq 0) \\ \text{resp.: } 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} J_0(\lambda_{0,n} r) A_{0,n} \quad \text{voor } m=0 \quad (15)$$

$$\text{Analoog: } \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) \sin m\varphi d\varphi = \pi \sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{m,n} r) B_{m,n} \quad (m \neq 0) \\ 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} J_0(\lambda_{0,n} r) B_{0,n} \quad (m = 0). \quad (16)$$

Ter verdere bepaling van $A_{m,n}$ en $B_{m,n}$ maken wij gebruik van de orthogonaliteitsrelaties (12) en (13). (syllabus IV).

Uit (15) volgt:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) \cos m\varphi J_m(\lambda_{m,n} r) r dr d\varphi = \\ = A_{m,n} \int_0^a J_m^2(\lambda_{m,n} r) r dr = \\ = A_{m,n} a^2 \int_0^1 J_m^2(\xi_{m,n} x) x dx =$$

$$= \frac{a^2}{2} A_{m,n} J_{m+1}^2(\xi_{m,n}),$$

waarmede $A_{m,n}$ (althans in principe bepaald is.

Op dezelfde wijze vindt men

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) \sin m\varphi J_m(\lambda_{m,n}r) r dr d\varphi = \\ = \frac{a^2}{2} B_{m,n} J_{m+1}^2(\xi_{m,n}). \end{aligned}$$

De bepaling van de constanten A' en B' volgt op analoge wijze als de beginsnelheid voor elk punt van het membraan wordt gegeven.

MATHEMATISCH CENTRUM,
26 Boerhaavestr. 49,
AMSTERDAM - O.

Cursus:

Methoden der Mathematische Physica
te 's-Gravenhage.

Trillingen van een membraan VI

door

Prof. Dr S.C. van Veen.

Algemene methoden voor willekeurige begrenzing. Het randwaardeprobleem van het trillende membraan als probleem der variatierekening.

De in de voorafgaande gevallen geschetste methode kan eventueel nog worden voortgezet voor andere meer ingewikkelde begrenzingen, b.v. ellips, maar deze voert dan spoedig tot zeer grote complicaties, welke de toepassing vrijwel onmogelijk maken. Men heeft kunnen zien, dat de eigenwaarden en de eigenfuncties in deze problemen de voornaamste rol vervullen, i.h.b. zal reeds de kleinste eigenwaarde voor praktische toepassingen de hoofdrol vervullen (eerste trilling).

Wij zullen nu het algemene probleem behandelen met behulp van de methoden der variatierekening, welke een eenvoudig hulpmiddel levert om deze eerste eigenwaarde (en de bijbehorende eigenfunctie) voor meer algemene gevallen met grote benadering te bepalen.

Wij gaan weder uit van de differentiaalvergelijking:

$$\Delta W + \lambda^2 W = 0$$

met de randvoorwaarde $W = 0$.

Eerst zullen wij het volgende minimum-probleem beschouwen:

Men beschouwt alle functies $W(x,y)$, die aan de rand nul zijn, en welke voldoen aan de voorwaarde

$$J(W) = \iint W^2 dx dy = 1 \text{ (normerings-voorwaarde)} \quad (1)$$

waarbij de dubbelintegraal over het gehele membraan wordt uitgestrekt. Het is duidelijk, dat aan (1) door zeer willekeurige functies kan worden voldaan, welke aan de rand $= 0$ zijn, want stel, dat $W_1(x,y)$ een functie is, die alleen aan de voorwaarde voldoet, dat zij aan de rand $= 0$. Laat

$$\iint W_1^2 dx dy = a^2$$

zijn. (uit de aard der zaak positief), dan kiese men slechts

$$W = \frac{W_1}{a}.$$

Onder de functies W_1 welke aan de rand $= 0$ zijn, en welke bovendien vol-

doen aan de normeringsvoorwaarde (1), zoeken men naar die speciale functie W , welke bovendien de integraal

$$D(W) = \iint \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (2)$$

tot een minimum zal maken.

Wij zullen bewijzen, dat met deze functie W tegelijk de eerste eigenfunctie en de kleinste eigenwaarde is bepaald.

Volgens de klassieke methoden der variatierekening wordt dit minimumprobleem als volgt aangepakt. Beschouw naast $W(x,y)$ de functieklassie

$$U(x,y) = W(x,y) + \xi \varphi(x,y) + \eta \psi(x,y) \quad (3)$$

(ξ en η zijn willekeurige parameters), waarin $\varphi(x,y)$ en $\psi(x,y)$ willekeurige differentieerbare functies zijn, welke alleen moeten voldoen aan de randvoorwaarde $\varphi = 0$ en $\psi = 0$; zoals afgesproken is, moet U voldoen

$$J(U) = 1$$

$$\begin{aligned} D(U) = \iint \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy &= \iint \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy + \\ &+ 2\xi \iint \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right\} dx dy + 2\eta \iint \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right\} dx dy + \\ &+ \xi^2 \iint \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy + 2\xi\eta \iint \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right\} dx dy + \\ &+ \eta^2 \iint \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \end{aligned} \quad (4)$$

Evenzo

$$\begin{aligned} J(u) = \iint U^2 dx dy &= \iint W^2 dx dy + 2\xi \iint W\varphi dx dy + 2\eta \iint W\psi dx dy + \\ &+ \xi^2 \iint \varphi^2 dx dy + 2\xi\eta \iint \varphi\psi dx dy + \eta^2 \iint \psi^2 dx dy \end{aligned} \quad (5)$$

De minimum-eis verlangt nu, dat $D(U)$ een minimum bereikt voor de functie W , d.w.z. voor $\xi = 0, \eta = 0$, onder de nevenvoorwaarde $J = 1$.

Noem het rechterlid van (4)

$$D(\xi, \eta)$$

en het rechterlid van (5)

$$J(\xi, \eta).$$

Dan is dus het minimumprobleem:

Kies de functie W zodanig, dat $D(\xi, \eta)$ een minimum bereikt voor $\xi = 0, \eta = 0$ onder de nevenvoorwaarde $J(\xi, \eta) = 1$.

Volgens de bekende theorie der "gebonden extremen" zoekt men dus de "vrije extremen" van

$$D(\xi, \eta) - \lambda^2 J(\xi, \eta). \quad (6)$$

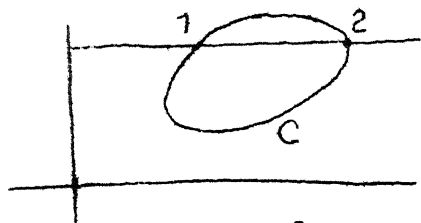
(λ^2 = multiplicator van Lagrange)

De gevraagde oplossing moet optreden voor $\xi = 0, \eta = 0$. Uit (6) volgen de voorwaarden

$$\frac{\partial D}{\partial \xi} = \lambda^2 \frac{\partial J}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial D}{\partial \eta} = \lambda^2 \frac{\partial J}{\partial \eta} \quad (\text{voor } \xi = 0, \eta = 0).$$

Dus volgens (4) en (5)

$$\left. \begin{aligned} \iint \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right\} dx dy &= \lambda^2 \iint W \varphi dx dy \\ \iint \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right\} dx dy &= \lambda^2 \iint W \psi dx dy \end{aligned} \right\} \quad (7)$$



Voor een willekeurige functie $P(x, y)$ geldt

$$\iint \frac{\partial P}{\partial x} dx dy = \int dy \left\{ \frac{\partial P}{\partial x} \right\} dx = dx(P_2 - P_1) = \int_C P dx. \text{ Neem } P = \varphi \frac{\partial W}{\partial x}.$$

$$\iint \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial x} + \varphi \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) dx dy = \int_C \varphi \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

omdat $\varphi = 0$ op de rand. Analoog

$$\iint \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial y} + \varphi \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) dx dy = 0 \quad (8')$$

Uit (7), (8) en (8') volgt onmiddellijk

$$\iint \left\{ \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\} dx dy = - \iint \varphi \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right\} dx dy = \lambda^2 \iint W \varphi dx dy$$

of

$$\boxed{\iint \varphi \{ \Delta W + \lambda^2 W \} dx dy = 0.} \quad (9)$$

Analoog

$$\boxed{\iint \psi \{ \Delta W + \lambda^2 W \} dx dy = 0.} \quad (9')$$

De minimum-eis is dus gelijkwaardig met (9) en (9') voor willekeurige functies φ en ψ die aan de rand verdwijnen. Daarom moet voor alle punten x, y van het membraan

$$\Delta W + \lambda^2 W = 0$$

zijn voor W , die aan de gestelde minimum-eis voldoet. Wij zien dus, dat iedere W , die aan de gestelde minimum-eis voldoet, tegelijk een oplossing is van onze differentiaalvergelijking. Hij voldoet dan tevens aan de randvoorwaarde. Wegens (4) is dan de minimumwaarde van

$$\begin{aligned} D(U) \equiv D(W) &= \iint \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy = - \iint W \Delta W dx dy = \\ &= \lambda^2 \iint W^2 dx dy = \lambda^2 \quad (\text{wegens (1)}). \end{aligned} \quad (10)$$

Het absolute minimum is dus de kleinste eigenwaarde.

Slotson

De kleinste eigenwaarde van het randwaardeprobleem

$$\Delta W + \lambda^2 W = 0 \quad (W = 0 \text{ aan de rand})$$

is

$$\lambda_1^2 = \text{Minimum van } \iint \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy$$

voor alle mogelijke genormeerde functies $W(x, y)$ (d.w.z. $\iint W^2 dx dy = 1$), die aan de rand nul worden. De functie $W(x, y)$ welke de minimumwaarde λ_1^2 levert, is de gezochte bijbehorende eigenwaarde.

MATHEMATISCH CENTRUM,
2e Boerhaavestr. 49,
A m s t e r d a m - 0.

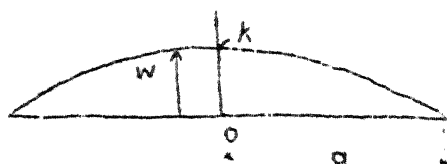
Cursus:
Methoden der Mathematische Physica
te 's-Gravenhage

Trillingen van een membraan VII
door
Prof. Dr S.C. van Veen.

Uitgewerkt voorbeeld van een trillend cirkelvormig membraan.

Wij nemen aan, dat de uitwijking w voor $t = 0$ parabolisch is:

$$w(0) = \frac{k}{a^2}(a^2 - r^2) \quad (k = \text{max. uitwijking voor } r = 0)$$



terwijl de beginsnelheid voor alle punten van het membraan $= 0$ wordt verondersteld. (Het membraan wordt dus uit de evenwichtstoestand losgelaten.)

De algemene uitkomst is:

$$w = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m\left(\frac{\xi_{m,n} r}{a}\right) \left\{ (A_{m,n} \cos m\vartheta + B_{m,n} \sin m\vartheta) \cos \nu_{m,n} t + (A'_{m,n} \cos m\vartheta + B'_{m,n} \sin m\vartheta) \sin \nu_{m,n} t \right\},$$

dus

$$w(0) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m\left(\frac{\xi_{m,n} r}{a}\right) (A_{m,n} \cos m\vartheta + B_{m,n} \sin m\vartheta) = \frac{k}{a^2}(a^2 - r^2).$$

Volgens de Fourier-ontwikkeling is

$$\int_0^{2\pi} w(0) \frac{\cos l\vartheta}{\sin l\vartheta} d\vartheta = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m\left(\frac{\xi_{m,n} r}{a}\right) \left\{ A_{m,n} \int_0^{2\pi} \cos m\vartheta \frac{\cos l\vartheta}{\sin l\vartheta} d\vartheta + B_{m,n} \int_0^{2\pi} \sin m\vartheta \frac{\cos l\vartheta}{\sin l\vartheta} d\vartheta \right\}.$$

De integralen, die hierin voorkomen, zijn vrijwel alle $= 0$. Het linkerlid is alleen $\neq 0$ voor $l = 0$ (cosinus-term). Men vindt dan:

$$2\pi w(0) = 2\pi \frac{k}{a^2}(a^2 - r^2) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m\left(\frac{\xi_{m,n} r}{a}\right) \left(A_{m,n} \int_0^{2\pi} \cos m\vartheta d\vartheta + B_{m,n} \int_0^{2\pi} \sin m\vartheta d\vartheta \right).$$

In het rechterlid blijven tenslotte over: de termen met $m = 0$ (cos-term). Men vindt dan na deling door 2 :

$$\frac{k}{a^2}(a^2 - r^2) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\xi_{0,n} r}{a}\right) A_{0,n} = \sum_{n=1}^{\infty} J_0(\lambda_{0,n} r) A_{0,n} \quad (1)$$

(de andere coëfficiënten $A_{m,n}$ en $B_{m,n}$ worden $= 0$).

Wij passen nu de vroeger gevonden orthogonaliteitsrelaties voor de Bessel-functies toe: (syllabus IV (12) en (13))

$$\int_0^a J_0(\lambda_{0,n}r) J_0(\lambda_{0,h}r) r dr = 0 \quad \text{voor } n \neq h,$$

$$\int_0^a \{J_0(\lambda_{0,h}r)\}^2 r dr = \frac{a^2}{2} J_1^2(\lambda_{0,h}r) = \frac{a^2}{2} J_1^2(\xi_{0,h})$$

en vinden uit (1)

$$\frac{k}{a^2} \int_0^a (a^2 - r^2) J_0(\lambda_{0,h}r) r dr = A_{0,h} \int_0^a J_0^2(\lambda_{0,h}r) r dr = \frac{A_{0,h} a^2}{2} J_1^2(\xi_{0,h})$$

of:

$$k \int_0^a J_0(\lambda_{0,h}r) r dr - \frac{k}{a^2} \int_0^a r^3 J_0(\lambda_{0,h}r) dr = A_{0,h} \frac{a^2}{2} J_1^2(\xi_{0,h}).$$

Stel $\lambda_{0,h}r = x = \frac{\xi_{0,h}r}{a}$

$$\frac{ka^2}{(\xi_{0,h})^2} \int_0^{\xi_{0,h}} x J_0(x) dx - \frac{ka^2}{(\xi_{0,h})^4} \int_0^{\xi_{0,h}} x^3 J_0(x) dx = A_{0,h} \frac{a^2}{2} J_1^2(\xi_{0,h}) \quad (2)$$

Hierdoor is de oplossing geheel teruggebracht tot de berekening van de elementaire integralen

$$\int_0^{\xi_{0,h}} x J_0(x) dx \quad \text{en} \quad \int_0^{\xi_{0,h}} x^3 J_0(x) dx,$$

welke berekend worden met behulp van (2) en (3) (syll. IV) als volgt:

$$\begin{aligned} \int_0^{\xi_{0,h}} x J_0(x) dx &= \int_0^{\xi_{0,h}} \frac{d}{dx} (x J_1(x)) dx = \xi_{0,h} J_1(\xi_{0,h}) \\ \int_0^{\xi_{0,h}} x^3 J_0(x) dx &= \int_0^{\xi_{0,h}} x^2 \frac{d}{dx} (x J_1(x)) dx = \left[x^3 J_1(x) \right]_0^{\xi_{0,h}} + \\ &- \int_0^{\xi_{0,h}} 2x^2 J_1(x) dx = \xi_{0,h}^3 J_1(\xi_{0,h}) - 2 \int_0^{\xi_{0,h}} \frac{d}{dx} (x^2 J_2(x)) dx = \\ &= \xi_{0,h}^3 J_1(\xi_{0,h}) - 2 \xi_{0,h}^2 J_2(\xi_{0,h}). \end{aligned}$$

Substitutie in (2) levert tenslotte

$$\frac{A_{0,h}}{2} J_1^2(\xi_{0,h}) = \frac{2k}{\xi_{0,h}^2} J_2(\xi_{0,h}), \text{ of}$$

$$A_{0,h} = \frac{4k}{(\xi_{0,h})^2} \frac{J_2(\xi_{0,h})}{J_1^2(\xi_{0,h})} \quad (4)$$

Uit de Fourier-ontwikkeling leidt men gemakkelijk af, dat alle andere coëfficiënten A en B = 0 worden. Daar

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{t=0} = 0 \quad (2e \text{ beginvoorwaarde})$$

leidt men op de bovengeschiedde wijze zonder moeite af, dat ook alle coëfficiënten A' en B' = 0 worden.

Er blijft dus over als oplossing van de trillingsvergelijking, met de gegeven randvoorwaarde en beginvoorwaarden:

$$w(t) = 4k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\xi_{0,n}^r}{a}\right) J_2(\xi_{0,n})}{(\xi_{0,n})^2 J_1^2(\xi_{0,n})} \cos\left(\frac{\xi_{0,n}}{a}t\right).$$

Hieruit leidt men b.v. nog de volgende mathematische betrekking voor de nulpunten $\xi_{0,n}$ af:

$$\text{Stel } t = 0, r = 0, (J_0(0) = 1).$$

$$w(0) = k = 4k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_2(\xi_{0,n})}{(\xi_{0,n})^2 J_1^2(\xi_{0,n})}$$

$$\text{of } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_2(\xi_{0,n})}{(\xi_{0,n})^2 J_1^2(\xi_{0,n})} = \frac{1}{4}$$

Toepassing van het voorafgaande voor de benaderde bepaling van de kleinste eigenwaarde en de eerst eigenfunctie. Principe van Raleigh.

In het voorgaande hebben we gezien, dat de kleinste eigenwaarde λ_1^2 van het randwaardeprobleem

$\Delta W + \lambda^2 W = 0$, $W = 0$ aan de rand gevonden wordt als minimumwaarde van $\iint \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy$, uitgedrukt over het gebied van het membraan, als de voor de concurrentie toegelaten functies alle mogelijke genormeerde functies $W(x,y)$ zijn, welke dus voldoen aan

$$\iint W^2 dx dy = 1.$$

Laten wij de normeringsvoorwaarde vallen, dan hebben wij slechts de minimum-waarde te bepalen van

$$\frac{\iint \left(\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy}{\iint W^2 dx dy} \quad (11)$$

Nu zal de gevraagde eigenfunctie $W(x,y)$ zeker moeten behoren tot die functies, welke aan de rand nul worden. Wij grenzen onze waardevoorraad van vergelijkingsfuncties reeds aanmerkelijk in, door ons te beperken tot die functies $W(x,y)$, die aan de rand $= 0$ zijn. Een willekeurige functie $W(x,y)$ die alleen voldoet aan deze randvoorwaarde, maar niet noodzakelijk voldoet aan de differentiaalvergelijking, zal bij substitutie in (11) in het algemeen een uitkomst opleveren, welke $> \lambda_1^2$ is (immers λ_1^2 is de minimumwaarde). Een functie $W(x,y)$, die alleen voldoet aan de randvoorwaarde ($W = 0$ op de rand), zullen wij een toegelaten functie noemen.

Rayleigh heeft het eerst gebruik gemaakt van het feit, dat iedere toegelaten functie bij substitutie in (11) een bovengrens van λ_1^2 levert, welke bovengrens bij geschikte keuze van $W(x,y)$ een goede benadering zal geven voor λ_1^2 (Principe van Rayleigh).

Wij willen dit principe toelichten aan de hand van het voorbeeld van een cirkelvormig membraan (met straal 1). Als eenvoudigste toegelaten functie kiezen wij

$$W(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

volgens (11) is

$$\lambda_1^2 < \frac{\iint (4x^2 + 4y^2) dx dy}{\iint (x^2 + y^2 - 1)^2 dx dy}$$

(beide integralen uitgestrekt over de cirkel $x^2 + y^2 = 1$). Met behulp van poolcoördinaten vindt men

$$\lambda_1^2 < \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^1 4r^2 r dr d\varphi}{\int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 - 1)^2 r dr d\varphi} = \frac{\int_0^1 4r^3 dr}{\int_0^1 r(r^2 - 1)^2 dr} = \underline{\underline{6}}$$
$$\lambda_1 < \sqrt{6} = 24495.$$

De juiste waarde is

$$\lambda_1 = \xi_1 = 24048 \text{ (p. 20 onderaan).}$$

MATHEMATISCH CENTRUM
2de Boerhaavestr. 49
A_m_s_t_e_r_d_a_m_0.

Cursus:

Methoden der Mathematische Physica

te 's-Gravenhage

Trillingen van een membraan VIII

door

Prof.Dr S.C.van Veen.

De methode van Rayleigh-Dirichlet heeft ons een bovengrens gegeven van de kleinste eigenwaarde op grond van de volgende overweging (Principe van Rayleigh).

De kleinste eigenwaarde λ_1^2 is de minimumwaarde van

$$D(W) = \iint \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (1)$$

als men voor $W(x,y)$ alle mogelijke toegelaten genormeerde functies invult, d.w.z. alle mogelijke functies van x en y , die aan de rand nul worden, terwijl bovendien $\iint W^2 dx dy = 1$. De functie, welke het gezochte minimum oplevert, is de bijbehorende eigenfunctie.

Substitueert men dus in het rechterlid van (1) een willekeurige toegelaten functie, dan levert $D(W)$ een uitkomst op welke zeker $\geq \lambda_1^2$ is, zodat men op deze wijze een bovengrens voor λ_1^2 verkrijgt.

Ofschoon hiermede weinig gewonnen schijnt, heeft Rayleigh opgemerkt, dat iedere niet al te ongeschikt gekozen toegelaten functie een zeer behoorlijke benadering geeft voor λ_1^2 .

Overigens zullen wij nog later in de methode van Ritz-Galerkin middelen leren kennen, om deze benadering willekeurig ver te verscherpen. Wij zullen echter eerst enige voorbeelden voor de berekening van de bovengrens afleiden. Als eerste en eenvoudigste voorbeeld kiezen wij het volledig bekende geval van het cirkelvormige membraan.

De rand is hierbij bepaald door de cirkel

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Als meest eenvoudig toegelaten functie vinden wij hier:

$$W(x,y) = C(x^2 + y^2 - a^2)$$

die inderdaad $=0$ op de rand.

Wij moeten nu

$$\iint \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy$$

uitstrekken over het gebied van de cirkel $x^2 + y^2 = a^2$.

Daarbij moet echter de willekeurige constante C zo worden bepaald, dat de functie $W(x,y)$ genormeerd is, d.w.z.

$$\iint W^2 dx dy = 1.$$

Het is hier voordeliger, poolcoördinaten in te voeren:

$$x = r \cos \varphi \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq a.$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$W(x,y) = W(r, \varphi) = C(r^2 - a^2).$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi}.$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2.$$

$$dx dy \rightarrow r dr d\varphi.$$

Wij moeten dus het minimum bepalen van

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} \left(\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 \right) r dr d\varphi.$$

als

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} W^2 r dr d\varphi = 1.$$

De gekozen toegelaten functie is

$$W = C(r^2 - a^2).$$

De tweede integraal levert:

$$C^2 \int_0^a \int_0^{2\pi} (r^2 - a^2)^2 r dr d\varphi = 1$$

$$2\pi C^2 \int_0^a (r^5 - 2a^2 r^3 + a^4 r) dr = 1$$

$$2\pi C^2 \left\{ \frac{a^6}{6} - \frac{2a^6}{4} + \frac{a^6}{2} \right\} = 1 \quad C^2 = \frac{12}{2\pi(2-6+6)a^6} = \frac{3}{\pi a^6}$$

De 1^e integraal levert:

$$C^2 \int_0^a \int_0^{2\pi} (2r)^2 r dr d\varphi = 2\pi C^2 \int_0^a r^3 dr = 2\pi C^2 \frac{a^4}{4} = \frac{6}{a^2}$$

De gevonden bovengrens voor $\lambda_1 = \frac{\sqrt{6}}{a} = \frac{2.4495}{a}$.

De exacte waarde van λ_1 is vroeger bepaald als

$$\lambda_{0,1} = \frac{\xi_{0,1}}{a}, \text{ waarin } \xi_{0,1} \text{ het 1}^e \text{ nulpunt van } J_0(x) \text{ is, dus}$$

$$\lambda_{0,2} \text{ (exact)} = \frac{2.4048}{a}. \text{ (Syllabus V, p.20).}$$

Ondanks de meest ruwe keuze van de toegelaten functie hebben wij dus reeds een benadering met een fout van minder dan 2% gevonden. Wij zullen overigens laten zien, dat deze fout zich zeer gemakkelijk willekeurig sterk laat verkleinen.

Het grote voordeel van de methode van Rayleigh bestaat daarin, dat daarmee de kleinste eigenwaarde kan worden geschat bij willekeurige

(mits mathematisch nauwkeurig gedefinieerde) begrenzing bij problemen die overigens mathematisch niet te behandelen zijn. Wij zullen als voorbeeld kiezen:

de grenskromme is een ellips : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Als boven kiezen wij als eenvoudigste toegelaten functie

$$W(x,y) = C(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2),$$

welke inderdaad wederom op de grenskromme nul wordt. Ook hier heeft de invoering van een gewijzigde soort poolcoördinaten succes, n.l.

$$x = ar \cos \varphi \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$y = br \sin \varphi \quad 0 \leq r \leq 1.$$

Men vindt gemakkelijk:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\cos \varphi}{a} \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{ar} \frac{\partial W}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\sin \varphi}{b} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{br} \frac{\partial W}{\partial \varphi}$$

$$W(r, \varphi) = Ca^2b^2(r^2 - 1) \quad ; \quad \frac{\partial W}{\partial r} = 2Ca^2b^2r \quad ; \quad \frac{\partial W}{\partial \varphi} = 0$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 = 4C^2a^4b^4r^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)$$

C moet worden bepaald uit

$$C^2a^4b^4 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 - 1)^2 r dr d\varphi = 1.$$

of

$$2\pi C^2a^4b^4 \int_0^1 (r^5 - 2r^3 + r) dr = 1$$

$$2\pi C^2a^4b^4 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 1 \quad \frac{\pi C^2a^4b^4}{3} = 1.$$

$\iint \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 \right\} dx dy$ wordt:

$$4C^2a^4b^4 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right) dr d\varphi = C^2a^4b^4 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right) d\varphi$$

$$= 2\pi C^2a^4b^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = \frac{3(a^2+b^2)}{a^2b^2}.$$

Wij vinden dus als bovengrens voor λ :

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab} \sqrt{3} = 1.732 \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}.$$

Voor het speciale geval: $a=2$, $b=1$ vindt men 1.9365 terwijl later te bespreken scherpe benaderingen hebben geleerd

$$1.868 \leq \lambda \leq 1.889$$

De fout is wederom gering, en bedraagt minder dan 4%.

De methode van Ritz, uitgebreid door Galerhin berust op de eenvoudige overweging, dat men een willekeurige combinatie van toegelaten functies $W_1(x,y)$, $W_2(x,y)$, $W_3(x,y)$ kan opstellen in de vorm

$$W(x,y) = a_1 W_1(x,y) + a_2 W_2(x,y) + a_3 W_3(x,y) \dots$$

Dan is $W(x,y)$ ook een toegelaten functie, voor iedere willekeurige keuze van de parameters $a_1, a_2, \dots$

Men kan zonder beperking nog $a_1 = 1$ stellen. Dan heeft men nog de vrije beschikking over een stelsel parameters $a_2, a_3, \dots$, die men zo geschikt mogelijk kan kiezen, n.l. zodanig dat

$$\frac{\iint \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy}{\iint W^2 dx dy}$$

een minimum wordt.

Het linkerlid wordt een functie van $a_2, a_3, \dots$ dus $F(a_2, a_3, \dots)$. Men moet dan zorgen, dat

$$\frac{\partial F}{\partial a_2} = \frac{\partial F}{\partial a_3} = \dots = 0.$$

Cursus:
Methoden der Mathematische Physica
te 's-Gravenhage
Trillingen van een membraan IX
door
Prof. Dr S.C. van Veen.

De methode van Ritz-Galerkin.

Laten $W_1(x,y)$, $W_2(x,y)$, $W_3(x,y)$ een stelsel toegelaten functies zijn, welke dus aan de rand $= 0$ zijn. Dan is ook

$$W(x,y) = a_1 W_1(x,y) + a_2 W_2(x,y) + a_3 W_3(x,y) + \dots \quad (1)$$

een toegelaten functie voor iedere willekeurige keuze der parameters. De kleinste eigenwaarde λ_1^2 is de minimumwaarde van

$$D(W) = \frac{\iint \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy}{\iint W^2 dx dy} \quad (2)$$

Substitueren wij in het rechterlid van (2) de uitdrukking (1), dan is het duidelijk, dat de uitkomst een functie van de willekeurige parameters $a_1, a_2, \dots$ wordt.

$$D(W) = \frac{T(a_1, a_2, a_3, \dots)}{N(a_1, a_2, a_3, \dots)} = \lambda^2(a_1, a_2, a_3, \dots). \quad (3)$$

Ritz en Galerkin bepalen nu de minimum-waarde van $\lambda(a_1, a_2, a_3, \dots)$. Volgens de regels der analyse zijn de noodzakelijke voorwaarden

$$\frac{\partial \lambda^2}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial \lambda^2}{\partial a_2} = 0, \quad \frac{\partial \lambda^2}{\partial a_3} = 0, \dots$$

of

$$\frac{N \frac{\partial T}{\partial a_1} - T \frac{\partial N}{\partial a_1}}{N^2} = \frac{N \frac{\partial T}{\partial a_2} - T \frac{\partial N}{\partial a_2}}{N^2} = \frac{N \frac{\partial T}{\partial a_3} - T \frac{\partial N}{\partial a_3}}{N^2} = \dots = 0. \quad (4)$$

Uit (3) en (4) volgt

$$\frac{\frac{\partial T}{\partial a_1}}{\frac{\partial N}{\partial a_1}} = \frac{T}{N} = \lambda^2_{\min}, \quad \frac{\frac{\partial T}{\partial a_2}}{\frac{\partial N}{\partial a_2}} = \frac{T}{N} = \lambda^2_{\min}, \text{ etc.} \quad (5)$$

Substitutie van (1) in (2) geeft:

$$D(W) = \frac{T(a_1, a_2, a_3, \dots)}{N(a_1, a_2, a_3, \dots)} = \frac{a_1^2 P_{11} + a_2^2 P_{22} + a_3^2 P_{33} + \dots + 2a_1 a_2 P_{12} + 2a_1 a_3 P_{13} + \dots}{a_1^2 Q_{11} + a_2^2 Q_{22} + a_3^2 Q_{33} + \dots + 2a_1 a_2 Q_{12} + 2a_1 a_3 Q_{13} + \dots} \quad (6)$$

waarin

$$P_{kl} = \iint \left\{ \left(\frac{\partial W_k}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial W_l}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial W_k}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial W_l}{\partial y} \right) \right\} dx dy$$

$$Q_{kl} = \iint W_k W_l dx dy \quad (7)$$

(de grootheden P_{kl} en Q_{kl} zijn dus bekend).

Uit (5) en (6) volgt:

$$\lambda_{\min}^2 = \frac{a_1 P_{11} + a_2 P_{12} + a_3 P_{13} + \dots}{a_1 Q_{11} + a_2 Q_{12} + a_3 Q_{13} + \dots} = \frac{a_1 P_{21} + a_2 P_{22} + a_3 P_{23} + \dots}{a_1 Q_{21} + a_2 Q_{22} + a_3 Q_{23} + \dots}$$

$$= \frac{a_1 P_{31} + a_2 P_{32} + a_3 P_{33} + \dots}{a_1 Q_{31} + a_2 Q_{32} + a_3 Q_{33} + \dots},$$

of

$$a_1 (P_{11} - Q_{11} \lambda_m^2) + a_2 (P_{12} - Q_{12} \lambda_m^2) + a_3 (P_{13} - Q_{13} \lambda_m^2) + \dots = 0$$

$$a_1 (P_{21} - Q_{21} \lambda_m^2) + a_2 (P_{22} - Q_{22} \lambda_m^2) + a_3 (P_{23} - Q_{23} \lambda_m^2) + \dots = 0$$

$$a_1 (P_{31} - Q_{31} \lambda_m^2) + a_2 (P_{32} - Q_{32} \lambda_m^2) + a_3 (P_{33} - Q_{33} \lambda_m^2) + \dots = 0.$$

.

Aan dit stelsel lineaire homogene vergelijkingen moet tegelijkertijd voldaan worden door een niet triviale oplossing (d.w.z. $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots \neq 0$).

Dit vereist, dat de determinant:

$$\begin{vmatrix} P_{11} - Q_{11} \lambda_m^2 & P_{12} - Q_{12} \lambda_m^2 & P_{13} - Q_{13} \lambda_m^2 & \dots \\ P_{21} - Q_{21} \lambda_m^2 & P_{22} - Q_{22} \lambda_m^2 & P_{23} - Q_{23} \lambda_m^2 & \dots \\ P_{31} - Q_{31} \lambda_m^2 & P_{32} - Q_{32} \lambda_m^2 & P_{33} - Q_{33} \lambda_m^2 & \dots \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

(determinant van Ritz-Galerkin).

De uitwerking van deze determinant levert een hogere-gradsvergelijking in de gevraagde grootte λ_m^2 . De graad van deze vergelijking is gelijk aan het aantal gebruikte toegelaten functies.

Men kan van deze vergelijking nog verschillende bijzonderheden bewijzen:

- 1) Alle wortels λ_m^2 zijn reëel en positief.
- 2) Niet alleen de kleinste oplossing λ_1^2 levert een bovengrens voor de kleinste eigenwaarde λ_1^2 , maar de volgende oplossingen zijn bovengrenzen voor de volgende eigenwaarden (Trefftz, Weinstein, Kamke).

In de praktijk zal men in de regel volstaan met 2 toegelaten oplossingen, waardoor de determinant een vergelijking van de 2^e graad in λ^2 levert. De uitkomsten, die men op deze wijze voor de kleinste eigenwaarde verkrijgt, zijn buitengewoon nauwkeurig. Wij zullen deze methode illustreren aan enkele voorbeelden.

Voorbeeld 1. Scherper benadering van het 1^e nulpunt van $J_0(x)$. Wij hebben in Syllabus VIII deze waarde reeds in eerste benadering bepaald door de methode van Rayleigh (gebruik maken van 1 toegelaten functie). Wij gebruikten toen

$$W = W_1 = r^2 - a^2. \quad (9)$$

Wij zullen daarnaast nu gebruiken de toegelaten functie

$$W_2 = r^4 - a^4. \quad (9')$$

De vroegere uitkomsten geven gemakkelijk (in verband met (7) en de transformatieformules op pag. 31 (VIII)):

$$\begin{aligned} P_{kl} &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \left\{ \cos^2 \varphi \frac{\partial W_k}{\partial r} \frac{\partial W_l}{\partial r} + \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} \frac{\partial W_k}{\partial \varphi} \frac{\partial W_l}{\partial \varphi} + \sin^2 \varphi \frac{\partial W_k}{\partial r} \frac{\partial W_l}{\partial r} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} \frac{\partial W_k}{\partial \varphi} \frac{\partial W_l}{\partial \varphi} \right\} r dr d\varphi = \\ &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\partial W_k}{\partial r} \frac{\partial W_l}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial W_k}{\partial \varphi} \frac{\partial W_l}{\partial \varphi} \right\} r dr d\varphi, \end{aligned}$$

evenzo

$$Q_{kl} = \int_0^a \int_0^{2\pi} W_k W_l r dr d\varphi.$$

Wij vinden dan uit (9) en (9')

$$P_{11} = \int_0^a \int_0^{2\pi} 4r^2 r dr d\varphi = \underline{2\pi a^4}$$

$$P_{12} = \int_0^a \int_0^{2\pi} 8r^4 r dr d\varphi = \underline{2\pi \frac{4}{3} a^6} = P_{21}$$

$$P_{22} = \int_0^a \int_0^{2\pi} 16r^6 r dr d\varphi = \underline{2\pi 2a^8}$$

$$Q_{11} = \int_0^a \int_0^{2\pi} (r^2 - a^2)^2 r dr d\varphi = \frac{2\pi}{2} \frac{(r^2 - a^2)^3}{3} \Big|_0^a = \pi \frac{a^6}{3}$$

$$\begin{aligned} Q_{12} &= \int_0^a \int_0^{2\pi} (r^2 - a^2)(r^4 - a^4) r dr d\varphi = \pi a^8 \int_0^1 (1-x)(1-x^2) dx = \\ &= \pi a^8 \int_0^1 (1-x-x^2+x^3) dx = \pi a^8 \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{12} \pi a^8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{22} &= \int_0^a \int_0^{2\pi} (r^4 - a^4)^2 r dr d\varphi = a^{10} \int_0^1 (1-x^2)^2 dx = \\ &= \pi a^{10} \int_0^1 (1-2x^2+x^4) dx = \pi a^{10} \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{8}{15} \pi a^{10}. \end{aligned}$$

Stelt men (als vroeger) $\lambda_m = \frac{\xi}{a}$, dan vindt men gemakkelijk voor de determinant (8)

$$\begin{vmatrix} 2 - \frac{\xi^2}{3}, & \frac{8}{3} - \frac{5\xi^2}{12} \\ \frac{8}{3} - \frac{5\xi^2}{12}, & 4 - \frac{8\xi^2}{15} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{of} \quad \begin{vmatrix} 24 - 4\xi^2, & 32 - 5\xi^2 \\ 160 - 25\xi^2, & 240 - 32\xi^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Elementaire transformaties geven:

$$\begin{vmatrix} 24 - 4\xi^2 & 32 - 5\xi^2 \\ 16 - \xi^2 & 48 - 2\xi^2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 24 - 4\xi^2 & 8 - \xi^2 \\ 16 - \xi^2 & 32 - \xi^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Stel $\xi^2 = 4x$

$$\begin{vmatrix} 6 - 4x, & 2 - x \\ 4 - x, & 8 - x \end{vmatrix} = 0$$

$$(4x^2 - 38x + 48) - (x^2 - 6x + 8) = 0$$

$$3x^2 - 32x + 40 = 0$$

$$x = \frac{32 \pm \sqrt{544}}{6} = \frac{16 \pm \sqrt{136}}{3} = \frac{16 \pm 11,6619038}{3}$$

$$x_1 = 1,446032 \quad \xi_1^2 = 5,784128$$

$$\xi_1 = 2,4050.$$

De exacte waarde is 2,4048 (zie vroeger).

Wij zullen vervolgens ditzelfde procédé toepassen op de ellips. Wij kiezen daartoe als toegelaten functies:

$$W_1(xy) = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2$$

$$W_2(xy) = (b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2)(b^2x^2 + a^2y^2 + a^2b^2).$$

MATHMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestraat 49,
A M S T E R D A M - O.

Cursus:
Methoden der Mathematische Physica
te 's-Gravenhage
Trillingen van een membraan X
door
Prof. Dr S.C. van Veen.

Toepassing van de methode van Ritz-Galerkin op een ellips.

Voorbeeld 2. Voor de ellips stellen wij als vroeger: $x = ar \cos \varphi$,
 $y = br \sin \varphi$. De rand van het ellips gebied wordt gegeven door $r = 1$.
Voor het binnengebied is $0 < r < 1$. Als vroeger vinden wij:

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial x} &= \frac{\partial W}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\cos \varphi}{a} \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{ar} \frac{\partial W}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= \frac{\partial W}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\sin \varphi}{b} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{br} \frac{\partial W}{\partial \varphi}, \\ \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 &= \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}\right) + \\ &+ \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 \left(\frac{\sin^2 \varphi}{a^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{b^2}\right) - \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \left(-\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right).\end{aligned}$$

Wij kiezen als toegelaten functies

$$W_1 = a^2 b^2 (r^2 - 1) \text{ en } W_2 = a^4 b^4 (r^4 - 1) \text{ dus } \frac{\partial W_1}{\partial \varphi} = \frac{\partial W_2}{\partial \varphi} = 0.$$

$$P_{k,1} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}\right) \frac{\partial W_k}{\partial r} \frac{\partial W_1}{\partial r} ab r dr d\varphi,$$

$$Q_{k,1} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} W_k W_1 ab r dr d\varphi = 2\pi \int_0^1 W_k W_1 ab r dr,$$

dus,

$$P_{11} = a^5 b^5 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}\right) d\varphi \int_0^1 4r^3 dr = \pi a^5 b^5 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right),$$

$$P_{12} = a^7 b^7 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}\right) d\varphi \int_0^1 8r^5 dr = \frac{4}{3} \pi a^7 b^7 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right),$$

$$P_{22} = a^9 b^9 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}\right) d\varphi \int_0^1 16r^7 dr = 2\pi a^9 b^9 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right),$$

$$Q_{11} = 2\pi a^5 b^5 \int_0^1 (r^2 - 1)^2 r dr = \frac{\pi a^5 b^5}{3},$$

$$Q_{12} = 2\pi a^7 b^7 \int_0^1 (r^2 - 1)(r^4 - 1) r dr = \frac{5}{12} \pi a^7 b^7,$$

$$Q_{22} = 2\pi a^9 b^9 \int_0^1 (r^4 - 1)^2 r dr = \frac{8}{15} \pi a^9 b^9.$$

De determinant van Ritz-Galerkin wordt dus (na triviale delingen),

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{\lambda^2}{3}, & \frac{4}{3} a^2 b^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - \frac{5}{12} \lambda^2 a^2 b^2 \\ \frac{4}{3} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - \frac{5}{12} \lambda^2, & 2 a^2 b^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - \frac{8}{15} \lambda^2 a^2 b^2 \end{vmatrix} = 0$$

of,

$$\begin{vmatrix} 12 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - 4 \lambda^2, & 16 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - 5 \lambda^2 \\ 80 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - 25 \lambda^2, & 120 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - 32 \lambda^2 \end{vmatrix} = 0,$$

wat herleid wordt tot:

$$\begin{vmatrix} 12 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - 4 \lambda^2, & 4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - \lambda^2 \\ 8 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - \lambda^2, & 16 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - \lambda^2 \end{vmatrix} = 0$$

of, door te stellen:

$$x = \frac{\lambda^2}{2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)}$$

$$\begin{vmatrix} 6 - 4x, & 2 - x \\ 4 - x, & 8 - x \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{vgl. Syll. IX p. 37})$$

$$x_1 = 1,446032, \text{ dus } \lambda_1^2 = 2,892 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)$$

(de methode van Rayleigh gaf $3 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)$).

Treffitz (Math. Ann.) meent deze uitkomst te kunnen verscherpen tot $2,8554 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)$, wat onmogelijk is, omdat voor $a = b$ (cirkel) dan wordt gevonden $\frac{5.7108}{a^2}$, wat beneden de exacte waarde $\xi_1^2 = 5.7830$ is gelegen.

De asymptotische verdeling der eigenwaarden.

Als besluit van deze beschouwingen zullen wij nog enige opmerkingen maken over de verdeling der eigenwaarden. Wij zullen i.h.b. nagaan, hoe groot het aantal eigenwaarden $<$ dan een gegeven getal z bedraagt. Algemene onderzoekingen op dit gebied vereisen een diepgaande mathematische analyse. Wij zullen ons daarom tot een schetsmatige behandeling moeten beperken. Dit onderzoek heeft tot de merkwaardige conclusie gevoerd, dat het aantal eigenwaarden $N(z)$, welke kleiner dan z is, weinig gevoelig is voor de vorm van de rand, maar in hoofdzaak afhangt van de grootte van het oppervlak binnen de rand. Wanneer F de oppervlakte van het membraan voorstelt, dan kan algemeen bewezen worden

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{N(z)}{z^2} = \frac{F}{4\pi}$$

($N(z)$ = aantal eigenwaarden $< z$).

Wij zullen deze formule eerst bewijzen voor de rechthoek, waarvoor de eigenwaarden exact bekend zijn, nl.

$$\lambda_{m,n} = \pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$

(a en b rechthoekenzijden). Als men het aantal der grootheden $\lambda_{m,n} < z$ wil beperken, dan moet dus

$$\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} < \frac{z^2}{\pi^2}$$

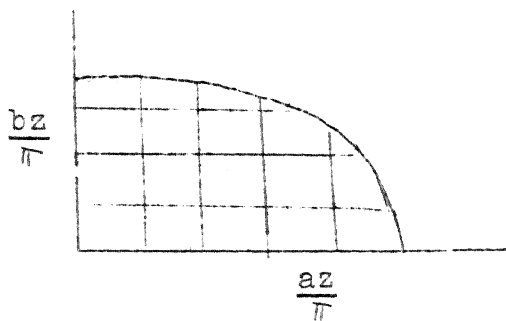
of

$$\frac{m^2}{(\frac{az}{\pi})^2} + \frac{n^2}{(\frac{bz}{\pi})^2} < 1.$$

Vergelijken wij deze vorm met de vergelijking van de ellips

$$\frac{x^2}{(\frac{az}{\pi})^2} + \frac{y^2}{(\frac{bz}{\pi})^2} = 1 \quad (\text{halve assen } \frac{az}{\pi} \text{ en } \frac{bz}{\pi})$$

dan moeten wij dus bepalen, hoe groot het aantal punten $P(m,n)$ met gehele coördinaten bedraagt, gelegen binnen het eerste kwadrant van de ellips. Zulke punten heten roosterpunten. Het is niet moeilijk in te



zien, dat dit aantal roosterpunten voor grote waarden van z procentsgewijs niet veel zal afwijken van het aantal vierkanten door het ellipskwadrant omsloten = de oppervlakte der kwartellips = $\frac{\pi}{4} \frac{az}{\pi} \frac{bz}{\pi} = \frac{abz^2}{4\pi} = \frac{Fz^2}{4\pi}$, waarin $F = ab$ = oppervlakte rechthoek.

Dus voor grote z is $N(z) \approx \frac{Fz^2}{4\pi}$ of beter $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{N(z)}{z^2} = \frac{F}{4\pi}$.

Men kan bewijzen, dat deze stelling algemeen voor willekeurige begrenzing geldt. Deze bewijzen berusten op de grondoverweging, dat bij inperking van het gebied (door het opleggen van extra-belemmering, vaste punten, vaste lijnen, vaste vlakdelen) ook de voorraad van de weggelaten functies beperkt wordt, waardoor de minimum-waarde van de integraal van Dirichlet noodzakelijk stijgt, althans niet daalt.

Ook het omgekeerde geldt. Bij opheffen van belemmeringen zal de voorraad der toegelaten functies toenemen, dus het minimum van de integraal van Dirichlet zal dalen, althans zeker niet stijgen. Uit deze overwegingen worden de volgende hulpstellingen afgeleid.

- I. De n^{de} eigenwaarde van een gebied G is kleiner dan de n^{de} eigenwaarde van elk deelgebied G' van G . Deze stelling heet de monotoniestelling der eigenwaarden.
- II. De n^{de} eigenwaarde van een gebied G verandert continu met de oppervlakteverandering van G .

Verdeelt men het gebied G in een willekeurig

aantal deelgebieden $G', G'', \dots$, die met elkaar geen enkel inwendig punt gemeen hebben, dan geldt:

- III. De n^{de} eigenwaarde uit een gebied G is zeker $\leq$ dan de n^{de} waarde van de totaalverzameling van de eigenwaarden der deelgebieden, wanneer deze in opklimmende volgorde worden gerangschikt.
- IV. Voor de n^{de} eigenwaarde λ_n van het gebied G met oppervlakte f geldt de asymptotische uitdrukking

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n} = \frac{4\pi}{f}.$$